SOLUCIONES

HAN APROBADO:
SANDRO PARDO
EDUARDO GALLEGO

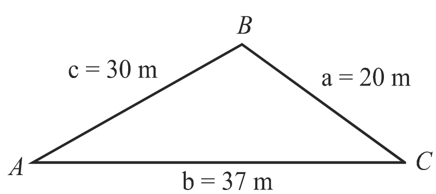
Ejercicio nº 1.-

Halla los ángulos del triángulo cuyos lados miden $a = 20$ m, $b = 37$ m y $c = 30$ m.

Solución:

• Apliquemos el teorema del coseno para hallar uno de los ángulos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$400 = 1\,369 + 900 - 2 \cdot 37 \cdot 30\cos\hat{A}$$
$$400 = 2\,269 - 2\,220\cos\hat{A}$$
$$2\,220\cos\hat{A} = 1\,869$$
$$\cos\hat{A} = \frac{1\,869}{2\,220} = 0{,}84 \rightarrow \hat{A} = 32^\circ\ 39'\ 34''$$



• Hallamos $\hat{B}$ aplicando de nuevo el teorema del coseno :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$
$$1\,369 = 400 + 900 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos\hat{B}$$
$$\cos\hat{B} = -0{,}0575$$
$$\hat{B} = 93^\circ\ 17'\ 47''$$

• El ángulo $\hat{C}$ lo obtenemos así :

$$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 54^\circ\ 2'39''$$

• Así:

$\hat{A} = 32^\circ 39' 34''$

$\hat{B} = 93^\circ 17' 47''$

$\hat{C} = 54^\circ 2' 39''$

Ejercicio nº 2.-

Halla:

a) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i} - i^{28}$

b) $\sqrt[3]{27i}$

Solución:

a) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i} - i^{28} = \dfrac{(2+2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} - 1 = \dfrac{-2-6i-2i-6i^2}{(-1)^2-(3i)^2} - 1 =$

$= \dfrac{-2-8i+6}{1+9} - 1 = \dfrac{4-8i}{10} - 1 = \dfrac{2(2-4i)}{10} - 1 = \dfrac{2-4i}{5} - 1 =$

$= \dfrac{2-4i-5}{5} = \dfrac{-3-4i}{5} = \dfrac{-3}{5} - \dfrac{4}{5}i$

b) $\sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27_{90^\circ}} = 3_{\frac{90^\circ + 360^\circ n}{3}} = 3_{30^\circ + 120^\circ n}$ para $n = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{30^\circ} = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

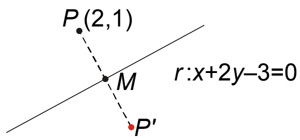
$3_{150^\circ} = 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

$3_{270^\circ} = 3(0 - i) = -3i$

Ejercicio nº 3.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(2, 1)$ respecto a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución:



- Hallamos la recta, s, perpendicular a r que pase por P:

$$2x - y + k = 0$$
$$4 - 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -3 \quad \rightarrow \quad s: 2x - y - 3 = 0$$

- Hallamos el punto de corte, M, de r y s:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad M\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

- M es el punto medio de PP'. Así, si $P'(x, y)$, entonces:

$$\left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2+x}{2} = \frac{9}{5} \\ \frac{1+y}{2} = \frac{3}{5} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 10 + 5x = 18 \\ 5 + 5y = 6 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 5x = 8 \\ 5y = 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, $P'\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Describe la siguiente cónica y represéntala gráficamente:

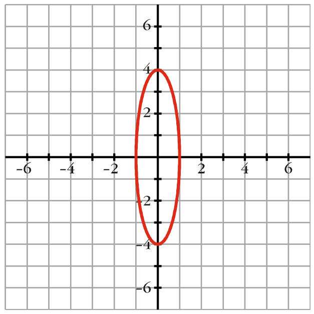
$$\mathbf{16x^2 + y^2 = 16}$$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $16x^2 + y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$

Es una elipse de semiejes 1 y 4. Su gráfica es:



b) Puesto que $a^2 - b^2 = c^2$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 1$ $\rightarrow$ $c = \pm\sqrt{15}$

Los focos son $F\left(0, \sqrt{15}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{15}\right)$.

Ejercicio nº 5.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x^4}{2} - \dfrac{6x^3}{5}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x^3 + 1}$

c) $f(x) = ln\left(x^4 - 2x\right)$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{12x^3}{2} - \dfrac{18x^2}{5} = 6x^3 - \dfrac{18x^2}{5}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x\left(2x^3 + 1\right) - \left(x^2 - 3\right)\cdot 6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} = \dfrac{4x^4 + 2x - 6x^4 + 18x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2} =$

$= \dfrac{-2x^4 + 18x^2 + 2x}{\left(2x^3 + 1\right)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x^4 - 2x}\cdot\left(4x^3 - 2\right) = \dfrac{4x^3 - 2}{x^4 - 2x}$

Ejercicio nº 6.-

a) Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

b) A partir de la gráfica, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to \quad x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad$ Punto $(0,0)$

• Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

• Asíntota horizontal: $y = -1$

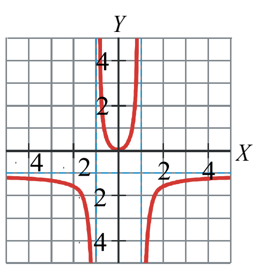
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad$ Punto $(0, 0)$

• Gráfica:



b)

• Continuidad:

Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$, es continua.

En $x = -1$ y en $x = 1$ es discontinua, pues tiene dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

• Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y creciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.