SELECCIÓ D'ACTIVITATS RESOLTES 4RT ESO MATEMÁTIQUES B

Ejercicio nº 1.-

a) Escribe en forma decimal cada uno de estos números:

$A = 9,27 \cdot 10^9$

$B = 3,85 \cdot 10^{-7}$

b) Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

$C = 58\,300\,000\,000\,000$

$D = 0,00000000271$

$E = 352 \cdot 10^{-8}$

Solución:

a) $A = 9\,270\,000\,000$

$B = 0,000000385$

b) $C = 5,83 \cdot 10^{13}$

$D = 2,71 \cdot 10^{-9}$

$E = 3,52 \cdot 10^{-6}$

Ejercicio nº 2.-

Escribe en forma de desigualdad y representa cada uno de los siguientes intervalos:

a) (2, 5]

b) (–∞, –3]

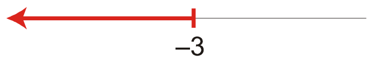
c) (2, +∞)

d) [–3, –1]

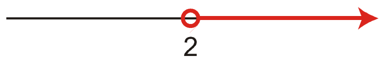
Solución:

a) $\{x \,/\; 2 < x \le 5\}$

b) $\{x \,/\; x \leq -3\}$



c) $\{x \,/\; x > 2\}$



d) $\{x \,/\; -3 \leq x \leq -1\}$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Efectúa y simplifica: $\left(\sqrt{2}\right)^3 - \sqrt{32} + 5\sqrt{2}$

b) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

Solución:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^3 - \sqrt{32} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2^4 \cdot 2} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \dfrac{8\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{8\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{7 - 3} = \dfrac{8\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{4} = 2\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Calcula y simplifica: $(x + 2)^2\,(2x + 1) - 2(x^3 - 2x + 3)$

b) Factoriza el siguiente polinomio: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

C) Halla el cociente y el resto de la siguiente división:

$(3x^5 - 16x^3 + 6x^2 + 7x - 2) : (3x^2 - 1)$

D) Factoriza este polinomio: $2x^4 + 4x^2$

Solución:

a) $(x + 2)^2\,(2x + 1) - 2(x^3 - 2x + 3) = (x^2 + 4x + 4)(2x + 1) - 2(x^3 - 2x + 3) =$

$= 2x^3 + x^2 + 8x^2 + 4x + 8x + 4 - 2x^3 + 4x - 6 = 9x^2 + 16x - 2$

b) Usamos la regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -6 & 8 & 6 & -9 \\
1 & & 1 & -5 & 3 & 9 \\
\hline
 & 1 & -5 & 3 & 9 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 6 & -9 & \\
\hline
 & 1 & -6 & 9 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & -9 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

Luego: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 3)^2$

C)

$$
\begin{array}{l|l}
)\quad 3x^5 \qquad - 16x^3 + 6x^2 + 7x - 2 & 3x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
\;\; -3x^5 \qquad\quad x^3 & x^3 - 5x + 2 \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad - 15x^3 + 6x^2 + 7x & \\
\qquad\qquad\;\; 15x^3 \qquad\quad - 5x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 6x^2 + 2x - 2 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 6x^2 \qquad\; + 2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2x &
\end{array}
$$

Cociente $= x^3 - 5x + 2$
Resto $= 2x$

D) $2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

(El polinomio $x^2 + 2$ no tiene raíces reales.)

Calcula y simplifica si es posible:

$$\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}} - \frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}$$

Solución:

Observa que $2x + 2 = 2(x + 1)$, por tanto:

m.c.m. $[x + 1,\ 2x + 2,\ (x + 1)^2] = 2(x + 1)^2$

Así:

$$\frac{2}{x+1}-\frac{x+3}{2x+2}+\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{4(x+1)}{2(x+1)^2}-\frac{(x+3)(x+1)}{2(x+1)^2}+\frac{2x}{2(x+1)^2}=$$

$$=\frac{4x+4}{2(x+1)^2}-\frac{x^2+4x+3}{2(x+1)^2}+\frac{2x}{2(x+1)^2}=\frac{4x+4-x^2-4x-3+2x}{2(x+1)^2}=$$

$$=\frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)^2}$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Resuelve:

a) $x^4-3x^2-4=0$

b) $\begin{cases}\sqrt{2y+1}+x=2\\ x-4y=4\end{cases}$

Solución:

a) Haciendo $x^2=z$, obtenemos $\rightarrow$ $z^2-3z-4=0$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad z=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\begin{cases}4\\-1\end{cases}$$

Así: $z=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

$z=-1 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow$ no hay solución.

Las soluciones son: $x_1=2,\ x_2=-2$

b) Despejamos x de la 2ª ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2y+1}+x=2\\ x-4y=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\sqrt{2y+1}+x=2\\ x=4y+4\end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{2y+1}+4y+4=2 \rightarrow \sqrt{2y+1}=-2-4y$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$2y+1=(-2-4y)^2 \rightarrow 2y+1=4+16y+16y^2 \rightarrow 16y^2+14y+3=0$

$$y=\frac{-14\pm\sqrt{196-192}}{32}=\frac{-14\pm\sqrt{4}}{32}=\frac{-14\pm 2}{32}\begin{cases}-\dfrac{16}{32}=-\dfrac{1}{2}\\[2ex] -\dfrac{12}{32}=-\dfrac{3}{8}\end{cases}$$

Así:

$$y=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\quad x=4\left(-\frac{1}{2}\right)+4=-2+4=2$$

$$y=-\frac{3}{8}\ \rightarrow\quad x=4\left(-\frac{3}{8}\right)+4=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$$

Comprobamos si ambas soluciones son válidas sustituyendo en la 1ª ecuación:

$$\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}+2=\sqrt{0}+2=2\ \rightarrow\quad x=2,\ y=-\frac{1}{2}\ \text{ es solución del sistema.}$$

$$\sqrt{2\left(-\frac{3}{8}\right)+1}+\frac{5}{2}=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}+\frac{5}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3\neq 2\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\quad x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{8}\ \text{ no es solución del sistema.}$$

Ejercicio nº 7.-

Un campo de baloncesto, de forma rectangular, tiene 40 m más de largo que de ancho. Calcula las dimensiones de dicho campo sabiendo que el área es de 2680,25 m^2.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ancho}\ \rightarrow\ x\\ \text{Largo}\ \rightarrow\ x+40\end{array}\right\}\ \rightarrow\quad \textit{Área}=x(x+40)=2680{,}25\ \rightarrow\quad x^2+40x-2680{,}25=0\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\quad x=\frac{-40\pm\sqrt{1600+10721}}{2}=\frac{-40\pm\sqrt{12321}}{2}=\frac{-40\pm 111}{2}=\begin{cases}35{,}5\\ -75{,}5\ \rightarrow\ \text{NO SIRVE}\end{cases}$$

Luego el ancho es de 35,5 m, y el largo, 75,5 m.

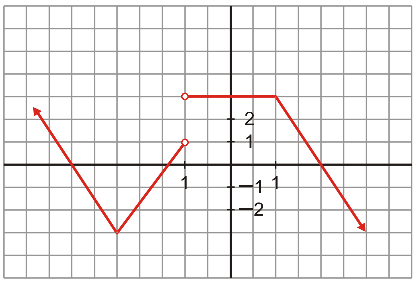
Ejercicio nº 8.-

Dada la gráfica correspondiente a una función *f*, responde a estas cuestiones:

a) **¿Cuál es el dominio de la función?**

b) **Estudia la continuidad de *f*.**

c) **Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función.**



Solución:

a) $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-1\}$

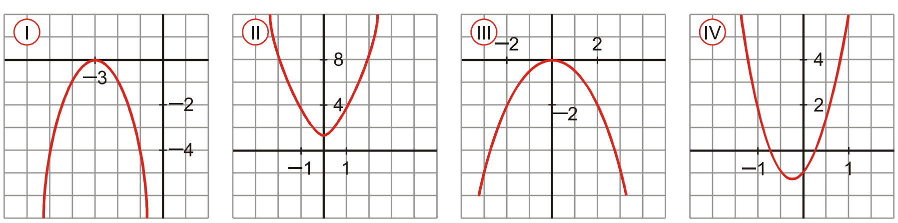
b) No es una función continua; se produce una discontinuidad en $x = -1$.

c) La función crece en el intervalo $(-2{,}5; -1)$; decrece en los intervalos $(-\infty; -2{,}5)$ y $(1, +\infty)$; es constante en el intervalo $(-1, 1)$.

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

a) **Calcula la ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ y cuya pendiente es $m = \frac{2}{3}$. Represéntala gráficamente.**

b) **Asocia a cada gráfica una de las siguientes expresiones:**



1.– $y = 2x^2 + 1$

2.- $y = \dfrac{-x^2}{2}$

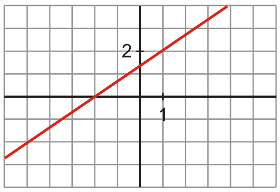
3.– $y = 5x^2 + 2x - 1$

4.– $y = -(x+3)^2$

Solución:

a) Ecuación punto-pendiente:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$



b) 1 → II
2 → III
3 → IV
4 → I

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

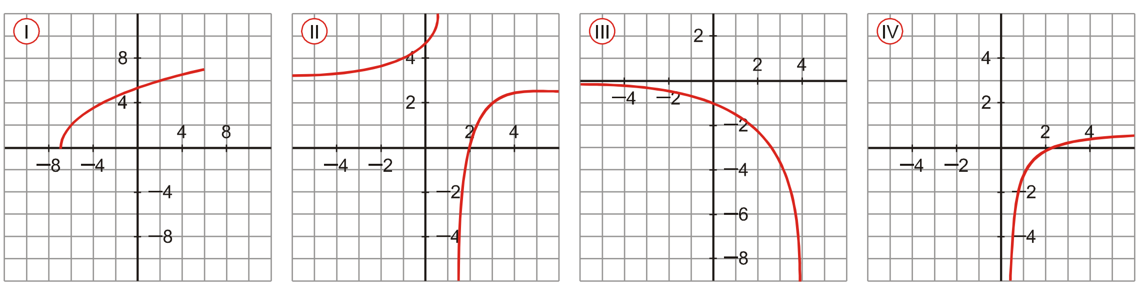
Asocia cada gráfica con una de estas expresiones:

a) $y = -1 + \log_5 2x$

b) $y = -1{,}7^x$

c) $y = 2\sqrt{x+7}$

d) $y = \dfrac{-2}{x-1} + 3$



Solución:

a) IV

b) III

c) I

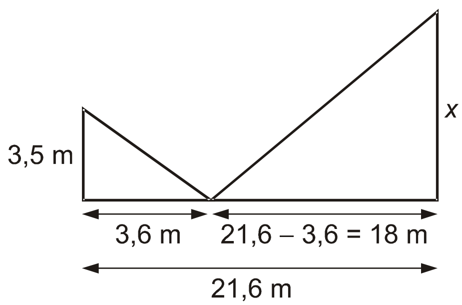
d) II

Ejercicio nº 11.-

Sonia sabe que la distancia entre los dos árboles que ve desde su ventana es de 21,6 m, y que el menor mide 3,5 m de altura. Para calcular la altura del mayor, se sitúa en un punto entre ambos árboles, desde el que el ángulo que forma la visual a la copa de los árboles con el suelo es el mismo. ¿Cuál es la altura que busca?

Solución:

El siguiente dibujo refleja la situación:



$x \rightarrow$ altura del árbol

Los dos triángulos rectángulos que se obtienen son semejantes, luego:

$$\frac{x}{3,5} = \frac{18}{3,6} \quad \rightarrow \quad x = \frac{3,5 \cdot 18}{3,6} = 17,5$$

El otro árbol tiene una altura de 17,5 m.

Ejercicio nº 12.-

Sabiendo que $tg\,\alpha = -1,3$ y que $270° < \alpha < 360°$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.

Solución:

$$tg\,\alpha = -1,3 \quad \rightarrow \quad \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -1,3 \quad \rightarrow \quad sen\,\alpha = -1,3\,cos\,\alpha$$

Sustituyendo esta expresión en $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$, se obtiene:

$$(-1,3cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 1,69cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad 2{,}69 cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad cos^2\alpha = \dfrac{1}{2{,}69} \quad \rightarrow \quad cos^2\alpha \approx 0{,}37 \quad \rightarrow$

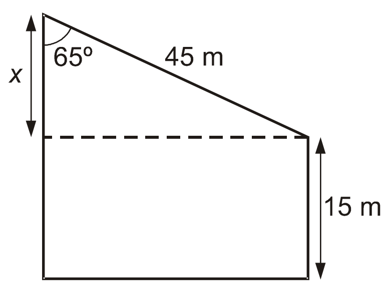
$\rightarrow \quad cos\,\alpha \approx \pm 0{,}61$

Pero como α pertenece al 4º cuadrante $\rightarrow \begin{cases} cos\,\alpha = 0{,}61 \\ sen\,\alpha = -1{,}3 \cdot 0{,}61 \quad \rightarrow \quad sen\,\alpha \approx -0{,}79 \end{cases}$

Ejercicio nº 13.-

Dos tejados de distinta altura están conectados por una pasarela de 45 m de longitud. El ángulo que forma el edificio más alto con la pasarela es de 65°. Calcula la altura del edificio más alto sabiendo que la del otro edificio es de 15 m.

Solución:



Calculamos el valor de la distancia x que se muestra en la ilustración:

$cos\,65^\circ = \dfrac{x}{45} \quad \rightarrow \quad x = 45 \cdot cos\,65^\circ \quad \rightarrow \quad x \approx 19$ m

Por tanto, el edificio más alto mide $19 + 15 = 34$ m.

Ejercicio nº 14.-

a) Halla la ecuación de la recta paralela a $3x - 4y + 1 = 0$ que pasa por el punto $(1, -2)$.

b) Halla la distancia entre los puntos $(1, 2)$ y $(-2, -2)$.

Solución:

a) Si son paralelas, tienen la misma pendiente:

$$3x - 4y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x+1}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad m = \frac{3}{4}$$

Ecuación: $y = -2 + \frac{3}{4}(x-1) \rightarrow 4y = -8 + 3x - 3 \rightarrow 3x - 4y - 11 = 0$

b) $dist = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Ejercicio nº 15.-

La siguiente tabla resume las estaturas, en centímetros, obtenidos al medir a las personas de un determinado grupo, *A*:

ESTATURA (cm)	**$[140, 150)$**	**$[150, 160)$**	**$[160, 170)$**	**$[170, 180)$**	**$[180, 190]$**
Nº PERSONAS	**8**	**19**	**28**	**32**	**13**

a) Calcula la estatura media y la desviación típica.

b) En otro grupo, *B*, la estatura media es de 164 cm, con una desviación típica de 6 cm. Calcula el coeficiente de variación en los dos casos y compra la dispersión en ambos grupos.

Solución:

a) Hallamos la marca de clase, x_i, de cada intervalo y hacemos la tabla de frecuencias

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
$[140, 150)$	145	8	1160	168200
$[150, 160)$	155	19	2945	456475
$[160, 170)$	165	28	4620	762300
$[170, 180)$	175	32	5600	980000
$[180, 190]$	185	13	2405	444925
		100	16730	2811900

Media:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{16730}{100} = 167{,}30$$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{2811900}{100} - 167{,}30^2} = \sqrt{129{,}71} \approx 11{,}39$$

La estatura media es de 167,30 cm, con una desviación típica de 11,39 cm.

b) $C.V._A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{11{,}39}{167{,}30} \approx 0{,}0681 \rightarrow 6{,}81\%$

$C.V._B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{6}{164} \approx 0{,}0366 \rightarrow 3{,}66\%$

La dispersión es mayor en *A*.

Ejercicio nº 16.-

En una determinada autoescuela han ido anotando el número de veces que se han tenido que examinar sus alumnos de la parte práctica hasta obtener el permiso de conducir. La siguiente tabla resume la información:

Nº DE EXAMENES	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Nº ALUMNOS	**12**	**25**	**28**	**16**	**8**	**6**	**4**	**3**

Calcula *Me*, Q_1, Q_3 y P_{90}.

Solución:

Hacemos la tabla de frecuencias acumuladas:

x_i	f_i	F_i	En %
1	12	12	11,76
2	25	37	36,27
3	28	65	63,73
4	16	81	79,41
5	8	89	87,25
6	6	95	93,14
7	4	99	97,06
8	3	102	100

$Me = p_{50} = 3$ porque para $x_i = 3$ la F_i supera el 50%

$Q_1 = p_{25} = 2$ porque para $x_i = 2$ la F_i supera el 25%
$Q_3 = p_{75} = 4$ porque para $x_i = 4$ la F_i supera el 75%
$p_{90} = 6$ porque para $x_i = 6$ la F_i supera el 90%

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Ocho ciclistas van por el carril bici en fila. ¿De cuántas formas pueden ir ordenados?

Solución:

El orden en la fila influye $\rightarrow$ $P_8 = 8! = 40\,320$

Se pueden colocar de 40 320 formas distintas.

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Si sacamos simultáneamente dos cartas de una baraja española (de 40 cartas), calcula la probabilidad de obtener:

a) Dos reyes.

b) Dos figuras.

Solución:

Sacar dos cartas simultáneamente es equivalente a sacar una carta y, sin devolverla al mazo, sacar otra. Los resultados son sucesos dependientes.

a) $P[\text{dos reyes}] = P[1^{\text{a}} \text{ rey}] \cdot P[2^{\text{a}} \text{ rey siendo } 1^{\text{a}} \text{ rey}] = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} = \dfrac{1}{30} \approx 0{,}0077$

b) $P[\text{dos figuras}] = P[1^{\text{a}} \text{ figura}] \cdot P[2^{\text{a}} \text{ figura siendo } 1^{\text{a}} \text{ figura}] = \dfrac{12}{40} \cdot \dfrac{11}{39} = \dfrac{11}{130} \approx 0{,}085$