SOLUCIONES EX. PENDIENTES DIC 2009

Ejercicio nº 1.-

Resuelve:

a) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \mathbf{5} - \sqrt{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$

b) $\dfrac{\mathbf{2}(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})}{\mathbf{3}} - \dfrac{\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}{\mathbf{3}} > \boldsymbol{x} - \mathbf{2}$

Solución:

a) $x = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 - 2\left(5 - \sqrt{x}\right) + 1$

$x = 25 + x - 10\sqrt{x} - 10 + 2\sqrt{x} + 1$

$8\sqrt{x} = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4, \quad y = 3$

b) $2(x - 3) - (x + 1) > 3(x - 2)$

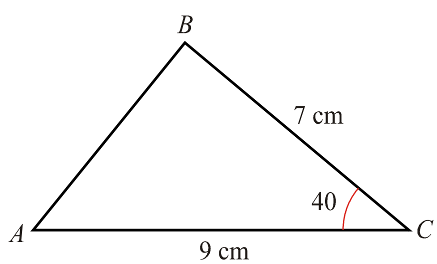
$2x - 6 - x - 1 > 3x - 6$

$-1 > 2x$

$x < \dfrac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Intervalo } \left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right)$

Ejercicio nº 2.-

Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC:



Solución:

• Aplicamos el teorema del coseno para hallar el lado c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\hat{c}$$
$$c^2 = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot cos40^\circ$$
$$c^2 = 49 + 81 - 96,52$$
$$c^2 = 33,48$$
$$c = 5,79 \text{ cm}$$

- Aplicamos el teorema de los senos para hallar el ángulo $\hat{A}$:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{7}{sen\hat{A}} = \frac{5,79}{sen40^\circ} \rightarrow$$
$$\rightarrow sen\hat{A} = \frac{7sen40^\circ}{5,79} = 0,777 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 50^\circ\ 59'\ 51''$$

- El ángulo $\hat{B}$ lo obtenemos así :

$$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right)$$

- Así:

$$\hat{A} = 50^\circ\ 59' 51''; \ a = 7 \text{ cm}$$
$$\hat{B} = 89^\circ\ 0' 9''; \ b = 9 \text{ cm}$$
$$\hat{C} = 40^\circ; \ c = 5,79 \text{ cm}$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Halla:

a) $\dfrac{\left(\mathbf{1} - \mathbf{3}\boldsymbol{i}\right)}{\left(\mathbf{3} - \mathbf{4}\boldsymbol{i}\right)} + \boldsymbol{i}^{37}$

b) $\sqrt[3]{\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}}$

Solución:

a) $$\frac{\left(1 - 3i\right)}{\left(3 - 4i\right)} + i^{37} = \frac{\left(1 - 3i\right)\left(3 + 4i\right)}{\left(3 - 4i\right)\left(3 + 4i\right)} + i = \frac{3 + 4i - 9i - 12i^2}{9 - 16i^2} + i =$$

$$= \frac{3 - 5i + 12}{9 + 16} + i = \frac{15 - 5i}{25} + i = \frac{5\left(3 - i\right)}{25} + i =$$

$$= \frac{3 - i}{5} + i = \frac{3 - i + 5i}{5} = \frac{3 + 4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

b) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)_{315^\circ}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2^3}\right)_{315^\circ}} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{315^\circ + 360^\circ n}{3}} =$

$= \left(\sqrt{2}\right)_{105^\circ + 120^\circ n}$ para $n = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$\left(\sqrt{2}\right)_{105^\circ} = \sqrt{2}\left(\cos 105^\circ + i \operatorname{sen} 105^\circ\right) = \sqrt{2}\left(-0,26 + i0,97\right) = -0,37 + 1,37i$$

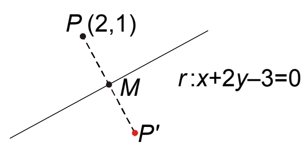
$$\left(\sqrt{2}\right)_{225^\circ} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$$

$$\left(\sqrt{2}\right)_{345^\circ} = \sqrt{2}\left(\cos 345^\circ + i \operatorname{sen} 345^\circ\right) = \sqrt{2}\left(0,97 - 0,26i\right) = 1,37 - 0,37i$$

Ejercicio nº 4.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(2, 1)$ respecto a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución:



- Hallamos la recta, s, perpendicular a r que pase por P:

$$2x - y + k = 0$$

$$4 - 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -3 \quad \rightarrow \quad s: 2x - y - 3 = 0$$

- Hallamos el punto de corte, M, de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \quad M\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

- M es el punto medio de PP'. Así, si $P'(x, y)$, entonces:

$$\left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+x}{2} = \dfrac{9}{5} \\ \dfrac{1+y}{2} = \dfrac{3}{5} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 10 + 5x = 18 \\ 5 + 5y = 6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5x = 8 \\ 5y = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$

Por tanto, $P'\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Ejercicio nº 5.-

a) Describe la siguiente cónica y represéntala gráficamente:

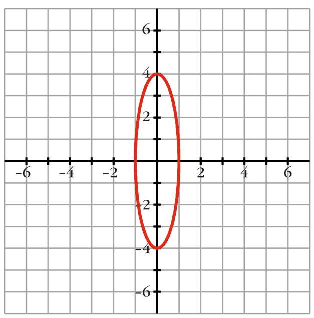
$$\mathbf{16x^2 + y^2 = 16}$$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $16x^2 + y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$

Es una elipse de semiejes 1 y 4. Su gráfica es:



b) Puesto que $a^2 - b^2 = c^2$, $\quad a^2 = 16 \quad$ y $\quad b^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c = \pm\sqrt{15}$

Los focos son $F\left(0, \sqrt{15}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{15}\right)$.

Ejercicio nº 6.-

Halla $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^7$

b) $f(x) = e^x \cdot senx$

c) $f(x) = cos\left(\frac{3x}{x^2 + 2}\right)$

Solución:

a) $f'(x) = 2x^3 - \frac{21}{5}x^6$

b) $f'(x) = e^x \cdot senx + e^x \cdot cosx = (senx + cosx)e^x$

c) $f'(x) = -sen\left(\dfrac{3x}{x^2+2}\right) \cdot \dfrac{3(x^2+2) - 3x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\left(\dfrac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}\right) \cdot sen\left(\dfrac{3x}{x^2+2}\right) =$

$= -\dfrac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} \cdot sen\left(\dfrac{3x}{x^2+2}\right) = \dfrac{3x^2-6}{(x^2+2)^2} \cdot sen\left(\dfrac{3x}{x^2+2}\right)$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

a) Representa la gráfica de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x(x-3)^2}$$

b) A partir de la gráfica, di cuál es el dominio de *f* (*x*), estudia su continuidad y di cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x(x-3)^2\right] = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x(x-3)^2\right] = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to x(x-3)^2 = 0 \begin{cases} x = 0 & \to \text{Punto}(0,0) \\ x = 3 & \to \text{Punto}(3,0) \end{cases}$

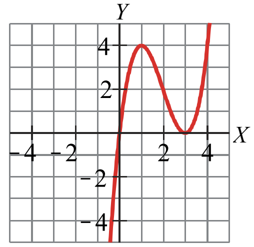
Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0,0)$

- Puntos singulares:

$f'(x) = (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3) = (x-3)[(x-3) + 2x] = (x-3)(3x-3) = 0$

$\begin{cases} x = 3 & \to \text{Punto } (3, 0) \\ x = 1 & \to \text{Punto } (1, 4) \end{cases}$

- Gráfica:



b) • Dominio = **R**

- Es una función continua.
- Es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(1,3)$.