Ejercicio nº 1.-

a) Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$\boldsymbol{log_3 \frac{1}{9} - log_3 \sqrt{3} + log_3 81}$$

b) Calcula el valor de *x*, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\boldsymbol{log\, x = log 102 - log 34}$$

Solución:

a) $log_3 3^{-2} - log_3 3^{1/2} + log_3 3^4 = -2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{2}$

b) $logx = log \frac{102}{34} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{102}{34} = 3$

Ejercicio nº 2.-

Resuelve:

a) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{5 - \sqrt{x}} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y^2 - 2y + 1} \end{aligned}\right\}$

b) $\boldsymbol{\frac{2(x-3)}{3} - \frac{x+1}{3} > x - 2}$

Solución:

a) $x = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 - 2\left(5 - \sqrt{x}\right) + 1$

$x = 25 + x - 10\sqrt{x} - 10 + 2\sqrt{x} + 1$

$8\sqrt{x} = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4, \quad y = 3$

b) $2(x-3) - (x+1) > 3(x-2)$

$2x - 6 - x - 1 > 3x - 6$

$-1 > 2x$

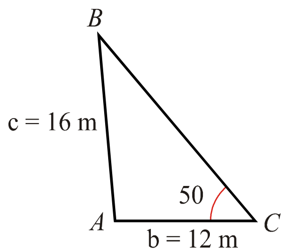
$x < \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Intervalo } \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$

__Ejercicio nº 3.-__

Resuelve el siguiente triángulo:

$\boldsymbol{b = 12}$ **m,** $\boldsymbol{c = 16}$ **m,** $\boldsymbol{\hat{C} = 50^\circ}$

Solución:



- Aplicamos el teorema de los senos para hallar el ángulo $\hat{B}$:

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \quad \rightarrow \quad \frac{12}{sen\hat{B}} = \frac{16}{sen50^\circ}$$

$$sen\hat{B} = \frac{12sen50^\circ}{16} = 0,57; \quad \hat{B} = 35^\circ\, 4'\, 1''$$

- El ángulo $\hat{A}$ será:

$$\hat{A} = 180^\circ - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 94^\circ\, 55'\, 59''$$

- Para hallar el lado *a*, aplicamos de nuevo el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{a}{sen(94^\circ\, 55'59'')} = \frac{16}{sen50^\circ} \rightarrow a = 20,81 \text{ m}$$

- Por tanto, la solución es:

$$a = 20,91 \text{ m}; \quad \hat{A} = 94^\circ\, 55'\, 59''$$
$$b = 12 \text{ m}; \quad \hat{B} = 35^\circ 4'\, 1''$$
$$c = 16 \text{ m}; \quad \hat{C} = 50^\circ$$

__Ejercicio nº 4.-__

a) Demuestra la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\frac{cosx + senx}{cosx - senx} = \frac{1}{cos2x} + tg2x}$$

b) Resuelve:

$$\mathbf{2 - 4cos^2 x = 2senx}$$

Solución:

a) $\dfrac{cosx + senx}{cosx - senx} = \dfrac{(cosx + senx)(cosx + senx)}{(cosx - senx)(cosx + senx)} =$

$$= \frac{cos^2 x + sen^2 x + 2senxcosx}{cos^2 x - sen^2 x} = \frac{1 + sen2x}{cos2x} =$$

$$= \frac{1}{cos2x} + \frac{sen2x}{cos2x} = \frac{1}{cos2x} + \mathrm{tg}\, 2x$$

b) $2 - 4cos^2 x = 2senx$

$$1 - 2cos^2 x = senx$$

$$1 - 2\left(1 - sen^2 x\right) = senx$$

$$1 - 2 + 2sen^2 x = senx$$

$$2sen^2 x - senx - 1 = 0$$

$$senx = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} senx = 1 \\ senx = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} senx = \quad \rightarrow \quad x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ senx = \dfrac{-1}{2} \begin{cases} x_2 = 210^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x_2 = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k \\ x_2 = 330^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x_3 = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \end{cases} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

a) Escribe en forma binómica $z = 2_{30^\circ}$

b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

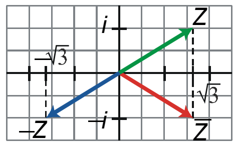
Solución:

a) $z = 2_{30^\circ} = 2\left(\cos 30^\circ + isen30^\circ\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

b) *Opuesto*: $-z = -\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

Conjugado: $\bar{z} = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$

c)



Ejercicio nº 6.-

Calcula:

a) $\dfrac{(2-3i)\,i^{25}}{(-1+2i)}$

b) $\sqrt[4]{-81}$

Solución:

a) $\dfrac{(2-3i)\,i^{25}}{(-1+2i)} = \dfrac{(2-3i)\,i}{(-1+2i)} = \dfrac{2i-3i^2}{(-1+2i)} = \dfrac{2i+3}{(-1+2i)} =$

$$= \frac{(3+2i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-3-6i-2i-4i^2}{(-1)^2-(2i)^2} = \frac{-3-8i+4}{1-4i^2} =$$

$$= \frac{1-8i}{1+4} = \frac{1-8i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$$

b) $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ+360^\circ n}{4}} = 3_{45^\circ+90^\circ n}$ para $n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$3_{45^\circ} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$3_{135^\circ} = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$3_{225^\circ} = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$3_{315^\circ} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

Ejercicio nº 7.-

Halla las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(2, -1)$ y $B(3, 2)$ en dos partes, tales que $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PA}$.

Solución:

Llamamos $P(x, y)$. Se tiene que cumplir que: $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PA}$.

Como $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BP} = (x-3, y-2) \\ \overrightarrow{PA} = (2-x, -1-y)\end{array}\right\}$, ha de ser:

$(x-3, y-2) = 3(2-x, -1-y)$, es decir:

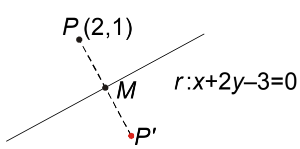
$$\left.\begin{array}{l}x-3 = 3(2-x) \\ y-2 = 3(-1-y)\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x-3 = 6-3x \\ y-2 = -3-3y\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}4x = 9 \\ 4y = -1\end{array}\right\} \quad x = \frac{9}{4},\ y = \frac{-1}{4}$$

Por tanto, $P\left(\frac{9}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

Ejercicio nº 8.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(2, 1)$ respecto a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución:



- Hallamos la recta, s, perpendicular a r que pase por P:

$$2x - y + k = 0$$
$$4 - 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -3 \quad \rightarrow \quad s: 2x - y - 3 = 0$$

- Hallamos el punto de corte, M, de r y s:

$$\left.\begin{array}{l}x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x + 2y = 3 \\ 2x - y = 3\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x = \dfrac{9}{5} \\ y = \dfrac{3}{5}\end{array}\right\} \rightarrow \quad M\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

- M es el punto medio de PP'. Así, si $P'(x, y)$, entonces:

$$\left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2+x}{2}=\dfrac{9}{5}\\[2mm] \dfrac{1+y}{2}=\dfrac{3}{5}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}10+5x=18\\ 5+5y=6\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}5x=8\\ 5y=1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{8}{5}\\[2mm] y=\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}$$

Por tanto, $P'\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

Ejercicio nº 9.-

Estudia la posición relativa de la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ y la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

Solución:

• Hallamos en centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (3, 1)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{9+1-6} = \sqrt{4} = 2$$

• Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$dist(C, r) = \frac{|2\cdot 3 - 3\cdot 1 + 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|6-3+5|}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \approx 2{,}22 > 2$$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

Ejercicio nº 10.-

Halla los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3} = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$

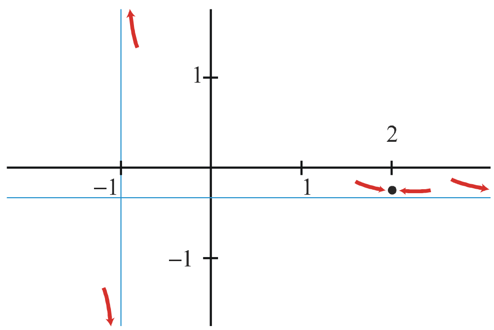
b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3} = -\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3} = \lim_{x\to -1} \frac{-x(x+1)}{3(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{-x}{3(x+1)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x\to -1^-} \frac{-x}{3(x+1)} = -\infty$; $\lim_{x\to -1^+} \frac{-x}{3(x+1)} = +\infty$

- Representación:



Ejercicio nº 11.-

Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 8x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}$

b) $f(x) = (x^4 - 3x)e^x$

c) $f(x) = sen\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

Solución:

a) $f'(x) = 40x^4 - 6x^2$

b) $f'(x) = (4x^3 - 3)e^x + (x^4 - 3x)e^x = (4x^3 - 3 + x^4 - 3x)e^x = (x^4 + 4x^3 - 3x - 3)e^x$

c) $f'(x) = cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$

$$= \cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

Ejercicio nº 12.-

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el punto de la abscisa $x = 1$.

b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x = 3$?

Solución:

a) • $f'(x) = 3x^2 - 6x$

- La pendiente de la recta es $f'(1) = -3$
- Cuando $x = 1$, $y = -1$.
- La recta será:

$$y = -1 - 3(x-1) = -1 - 3x + 3 = -3x + 2$$

b) $f'(3) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Es creciente en $x = 3$.

Ejercicio nº 13.-

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.
b) Represéntala gráficamente.

Solución:

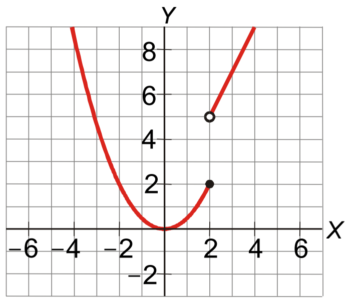
a) • Si $x \ne 2$, es una función continua.

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x+1\right) = 5 \end{array}\right\} \text{ No existe } \lim_{x\to 2} f(x); \text{ luego es discontinua en } x = 2.$$

b) • Si $x \le 2$, es un trozo de parábola.

- Si $x > 2$, es un trozo de recta.
- La gráfica es:



Ejercicio nº 14.-

a) Representa gráficamente la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 8x^2}$$

b) Ayudándote de la gráfica, estudia el dominio de *f*(*x*), su continuidad y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^4 - 8x^2\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 - 8x^2\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad x^4 - 8x^2 = x^2\left(x^2 - 8\right) = 0$$

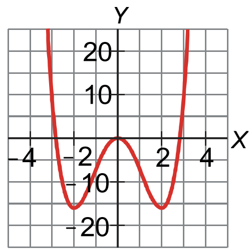
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \quad \text{Punto } (0,0) \\ x = -\sqrt{8} = -2{,}8 \rightarrow \quad \text{Punto } (-2{,}8;\ 0) \\ x = \sqrt{8} = 2{,}8 \rightarrow \quad \text{Punto } (2{,}8;\ 0) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x = 0 \rightarrow \quad y = 0 \rightarrow \quad \text{Punto } (0,0)$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \quad \text{Punto } (0,0) \\ x = -2 \rightarrow \quad \text{Punto } (-2,-16) \\ x = 2 \rightarrow \quad \text{Punto } (2,-16) \end{cases}$$

- Gráfica:



b) • Dominio = **R**
- Es una función continua.
- Es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y creciente en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Ejercicio nº 15.-

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4}}$$

a) Represéntala gráficamente.
b) Ayúdate de la gráfica para estudiar la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbf{R} - \{-4\}$
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \quad x^2 + 6x + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} \quad \rightarrow$ No corta al eje X.

Con el eje $y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3 \quad \rightarrow$ Punto $(0, 3)$

- Asíntota vertical : $x = -4$

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$$

- Asíntota oblicua :

$$\frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4} = x + 2 + \frac{4}{x + 4} \quad \Rightarrow \quad y = x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{4}{x + 4} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $\dfrac{4}{x + 4} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

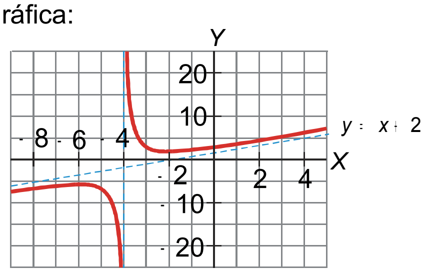
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(2x+6)(x+4) - \left(x^2+6x+12\right)}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+8x+6x+24-x^2-6x-12}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{2} =$$

$$\begin{cases} x = -6 & \rightarrow \quad \text{Punto}\,(-6,-6) \\ x = -2 & \rightarrow \quad \text{Punto}\,(-2,2) \end{cases}$$

- Gráfica:



b)

- Continuidad:

Si $x \neq 4$, es continua.

Si $x = -4$: es discontinua, pues tiene una rama infinita.

- Creciente en $(-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$ y decreciente en $(-6, -4) \cup (-4, -2)$